数理解析研究所講究録
171巻 1973年 180-190

ソリトンと
inverse scattering problem

東教大 光研　　戸田盛和

§1 序

非線型の波動現象が量子力学的な散乱の問題と関係づけられる場合が発見され，その現象の特長，解法などについての新しい観点が出現しようとしている。この処方箋はまだ不明確な点もあるし，すべての非線型方程式に有効であるとも考えられないが，Korteweg-de Vries 方程式，nonlinear Schrödinger 方程式，そしておそらくは modified KdV 方程式などに対して有効である。

この方法の歴史をふり返ってみると，いくつかの分野の国もちがう数学者，物理学者が，ある場合にはたがいに関係なく，前後してした仕事が現在次ぎつぎとつづり合わされつつあるように思われる。現在でも知られずに進行している仕事があるかも知れない。これらがたがいに統一されて確固たる観地が立てられる日が近いことを思わせる。

発見のいとぐちはプリンストン大学プラズマ研究所を中心とするグループの一連の仕事の中にある。すなわち，KdV方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

に対してMiura et al.[1]はassociated eigenvalue problem

$$\psi_{xx} - (u-\lambda)\psi = 0 \qquad (2)$$

を考え，固有値 λ がパラメーターとしての時間によらないことを証明した。

この計算過程に着目して，Gardner et al.[2]は $|x|\to\infty$ に対する $\psi(x,t)$ の漸近形から u をもとめる解法を考え出した。これが散乱の逆問題である。$\psi(x)$ の漸近形から u をもとめる逆問題はすでにGel'fand-Levitan[3]およびMarchenkoが論じているところであり，Kay-Morses[4]もGel'fand-Levitanの方程式を研究し，特別な場合に対する解法を与えている。この特別な場合は，反射波のない，すなわち完全透過のポテンシャル $u(x)$ であって，これはソリトンの集まりの解を与えることもGardnerらは述べている[2]。しかしその具体的な形，解の性質の吟味は与えていない。

P. D Lax[5]はGardnerらの取扱いを数学的に整理

している。

最近 Zakharov と Shabat[6] が nonlinear Schrödinger 方程式に対して散乱の逆問題の方法を適用して成功を収めた。これは Lax と Gardner らの方法を折衷拡張したものである。

この方法は疑点があるが，これらの方程式の解法などに極めて有力なものであると思われるので，Lax，Gardner や Zakharov らの扱いを参考にして，簡単な場合，すなわち KdV 方程式の場合にまとめてみようと思う。

§2. 非線型方程式

$u(t)$ を含む演算子 $L = L[u(t)]$ を考え，固有値方程式

$$L\psi = \lambda\psi \qquad (3)$$

に注目する[5]。パラメーター t について微分すると

$$L_t\psi + L\psi_t = \lambda\psi_t + \lambda_t\psi \qquad (4)$$

そこで ψ の時間変化を

$$i\psi_t = A\psi \qquad (5)$$

とすると $i\lambda\psi_t = A\lambda\psi = AL\psi$ であるから

$$L_t\psi = i[L, A]\psi + \lambda_t\psi \qquad (6)$$

ただし $[L, A] = LA - AL$，を得る。

さて，波動方程式

$$u_t = S[u] \tag{7}$$

が問題の非線型波動方程式であるとし，与えられた $S[u]$ の形に対して，この方程式が $u_t = S[u]$ が

$$L_t = i[L, A] \tag{8}$$

と同じであるような L と A とを選べるとする。そうすると，そのような L に対し

$$\lambda_t = 0 \tag{9}$$

すなわち L の固有値は時間がたっても変わらない。

KdV 方程式の場合は

$$\left.\begin{aligned} L &= -\frac{d^2}{dx^2} + u, \\ A &= -4i\frac{d^3}{dx^3} + 3i\left(u\cdot\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}\cdot u\right) + C \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

とおけばよい。C は x によらないものとする。このとき

$$L_t = i[L, A] \longrightarrow u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{11}$$

$$L\psi = \lambda\psi \rightarrow \psi_{xx} - (u-\lambda)\psi = 0 \tag{12}$$

$$i\psi_t = A\psi \rightarrow \psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi + C\psi \tag{13}$$

しかるに (12) から $\psi_{xxx} - u\psi_x - u_x\psi + \lambda\psi_x = 0$ (12′)

これに 3 を掛けて (13) から引くと

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u+\lambda)\psi_x = C\psi \tag{14}$$

となる。[2]　$|x| \to \infty$ では $u \to 0$ とする。

負の固有値 $\lambda_n = -\kappa_n^2$ に対して、$|x| \to \infty$ で ψ は指数関数的に0になり、

$$\psi_n \simeq c_n(t)\exp(+\kappa_n x), \qquad x \to -\infty \tag{15}$$

であるが、ここで規格化 $\int \psi_n^2\,dx = 1$ がいつでも成り立っているとする。このとき $C \equiv 0$ であることがわかる。それは(14)に ψ を掛けて各項を積分したとき $\psi = \psi_n$ に対し

$$\int \psi\,\psi_t\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int \psi^2\,dx = 0,$$

$$\int \psi\,\psi_{xxx}\,dx = -\int \psi_x\,\psi_{xx}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\partial}{\partial x}(\psi^2)\,dx = 0,$$

また $\psi_{xx} - (u-\lambda)\psi = 0$ により

$$\int \psi\,u\,\psi_x\,dx = \int \psi_x(\psi_{xx} + \lambda\psi)\,dx = 0$$

となり、左辺は0になるが右辺は $C\int \psi^2\,dx = C$ となるからである。したがって $C \equiv 0$ であり、$x \to -\infty$ に対し(14)は $\psi_t + \psi_{xxx} + 3\kappa_n^2\psi_x = 0$. これに(15)を入れると

$$\frac{dc_n}{dt} + 4\kappa_n^3 = 0$$

したがって[2]

$$c_n(t) = c_n(0)\,e^{-4\kappa_n^3 t}. \tag{16}$$

正の固有値 $\lambda = k^2 > 0$ に対しては、$|x| \to \infty$ のとき、ψ は $e^{\pm ikx}$ の線形結合で与えられる。そこで、x

の正の側から入射した波の反射係数を b，透過係数を a とし，

$$\left.\begin{aligned} \psi &\approx e^{+ikx} + b\, e^{-ikx}, & x &\to -\infty \\ \psi &\approx a\, e^{+ikx}, & x &\to +\infty \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

とする。これらを(14)に入れると

$$\frac{db}{dt} e^{-ikx} - 4ik^3 e^{+ikx} + 4ik^3 b e^{-ikx} = C\, e^{+ikx} + C b\, e^{-ikx}, \quad x \to -\infty$$

$$\frac{da}{dt} e^{+ikx} - 4ik^3 a\, e^{+ikx} = C a e^{+ikx}, \quad x \to +\infty$$

$e^{\pm ikx}$ の係数を等しくおき，

$$C = -4ik^3, \quad \frac{db}{dt} = -8ik^3 b,$$

$$\frac{da}{dt} = 0 .$$

したがって[2)]

$$\left.\begin{aligned} b(k,t) &= b(k,0)\, e^{-8ik^3 t} \\ a(k,t) &= b(k,0) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

束縛状態(15)の漸近形の係数 c_n の時間変化は(16)で与えられ，連続固有値に対する漸近形(17)の係数の変化は(18)で与えられる。

§3. 散乱の逆問題

束縛状態の κ_n と c_n，反射係数 $b(k)$ が与えられたと

き，これから $u(x)$ を求めるのが散乱の逆問題である。

◎方程式は

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\{\lambda-u(x)\}\psi=0 \tag{19}$$

であり， $x\to-\infty$ で $\psi\to e^{-ikx}$，

$$\psi(x)=e^{-ikx}+\int_{-\infty}^{x}K(x,s)e^{-iks}ds \tag{20}$$

とおくと

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi-u\psi=\left\{2\frac{\partial K(x,x)}{\partial x}-u\right\}e^{-ikx}$$
$$+\int_{-\infty}^{x}\left[K_{xx}(x,s)-K_{ss}(K,s)-u(x)K(x,s)\right]\times$$
$$\times e^{-iks}ds$$

ただし $K_{xx}(x,s)=\partial^2K(x,s)/\partial x^2$ 等，を得る．したがって

$$\left.\begin{aligned} u(x)&=2\frac{\partial K(x,x)}{\partial x},\\ \Lambda(x,s)&\equiv K_{xx}(x,s)-K_{ss}(x,s)-u(x)K(x,s)=0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ならば (19) は満足される．

◎ $R(\xi)$ を任意の関数として次式が証明される：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-u(x)\right]\left\{K(x,y)+R(x+y)+\int_{-\infty}^{x}K(x,z)R(y+z)dz\right\}$$
$$=\Lambda(x,y)+\left\{2\frac{\partial K(x,x)}{\partial x}-u(x)\right\}+\int_{-\infty}^{x}\Lambda(x,z)R(y+z)dz$$

したがって方程式

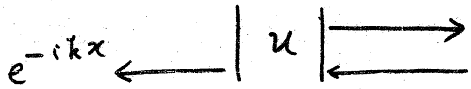
$$K(x,y)+R(x+y)+\int_{-\infty}^{x}K(x,z)R(y+z)\,dz=0 \tag{22}$$

は，(21) によって満足される．この方程式は Gel'fand-Levitan の方程式（Marchenko 方程式）と呼ばれている．

これらのことを念頭において逆問題にとりかかろう．

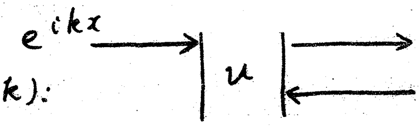
3-1. $\psi(x,k)\to e^{-ikx}$ $(x\to-\infty)$ であるから，これを

$\psi(x,k)$:



で表わそう。すると

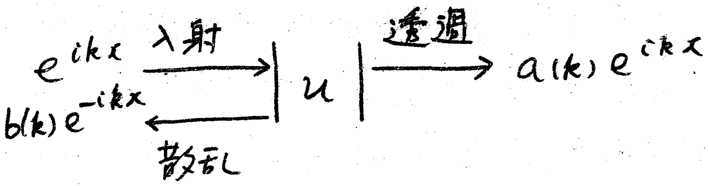
$\overset{*}{\psi}(x,k)=\psi(x,-k)$:



これらは (19) の独立な二つの解である；

3-2. 散乱を表わす波を

$\varphi(x,k)$:



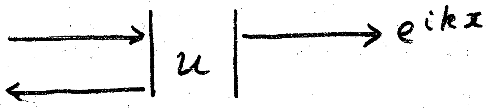
とし，これを $\psi(x,k)$ と $\psi^*(x,k)$ とで表わし

$$\varphi(x,k)=\psi^*(x,k)+b(k)\psi(x,k) \tag{23}$$

$$=a(k)\tilde{\psi}(x,k) \tag{24}$$

と書くことができる。ここに

$\tilde{\psi}(x,k)$:



3-3 (23) を用いて次の式を作る：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,k)e^{-iky}dk=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi^*(x,k)+b(k)\psi(x,k)\right]e^{-iky}dk \tag{25}$$

この式の右辺と左辺を別々に考えよう。

右辺で (20) を用いると $x>y$ のとき

$$(\text{右辺})=2\pi K(x,y)+\int_{-\infty}^{\infty}b(k)e^{-ik(x+y)}dk$$
$$+\int_{-\infty}^{x}K(x,s)ds\int_{-\infty}^{\infty}b(k)e^{-ik(s+y)}dk \tag{26}$$

を得る．ただし $\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-y)}dk=0\ (x>y)$ を用いた。

左辺においては $\varphi(x,k)$ として (24) を用いる．$u(x)$ による束縛状態は純虚数 $k=i\kappa$ によって表わされるが，

$$\Psi(x,i\kappa)\to e^{-\kappa x}\quad(x\to\infty)$$

である．この束縛状態は $x\to-\infty$ でも $e^{+\kappa x}$ の形で収束するはずである．$\Psi(x,k)=\beta\psi^*(x,k)+\alpha\psi(x,k)$ と展開したとすると $x\to-\infty$ で $e^{+\kappa x}$ $(k=i\kappa)$ になるのは $\psi(x,k)$ であるから，$k=i\kappa$ のとき，α をある係数として

$$\Psi(x,i\kappa)=\alpha\psi(x,i\kappa)$$

でなければならない。Faddeev はこれを証明している[7]。束縛状態は $\varphi(x,k)$ の pole になっているわけであり，この pole は透過率 $\alpha(k)$ の pole $(k=i\kappa)$ にほかならない[*]。これを囲む積分路をとると (25) の左辺は

$$(\text{左辺}) = \alpha\, 2\pi i\, \mathrm{Res.}\, a(k)\big|_{k=i\kappa}\, \psi(x, i\kappa)\, e^{\kappa y} \qquad (27)$$

となる。

$$2\pi m(\kappa) = -\alpha\, 2\pi i\, \mathrm{Res.}\, a(k)\big|_{k=i\kappa} \qquad (28)$$

とおき (20) を用いると、(27) は

$$(\text{左辺}) = -2\pi \left\{ \sum_n m(\kappa_n)\, e^{\kappa_n(x+y)} + \sum_n m(\kappa_n) \int_{-\infty}^{x} K(x, s)\, e^{\kappa_n(s+y)}\, ds \right\} \qquad (29)$$

となる。ただし pole は決まって $\kappa = \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \dots$ であるとした。

これらを (25) の両辺に入れると Gel'fand-Levitan の式

$$K(x, y) + R(x+y) + \int_{-\infty}^{x} K(x, s) R(s+y)\, ds = 0 \qquad (30)$$

が得られる。ここに

$$R(x+y) = \sum_n m(\kappa_n)\, e^{\kappa_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k)\, e^{-ik(x+y)}\, dk \qquad (30')$$

これは束縛状態の κ_n および $m(\kappa_n)$, 散乱の係数 $b(k)$ を与えたとき, $R(x+y)$ が与えられるから, G-L の方程式を解いて, $K(x, y)$ を求め, これから $u(x) = 2K_x(x, x)$ によって $u(x)$ が得られる処方箋を与える。

<u>3-4</u> $m(\kappa_n)$ は §2 で $C_n(t)$ と書いたもので, 時間 t をパラメタとして含み, <u>3-3</u> で得られた $u(x, t)$ は KdV 方程式の解になっている。

文献

1) R.M. Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal: J. Math. Phys. 9 (1968) 1204

2) C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura: Phys. Rev. Lett. 9 (1967) 1095.

3) I.M. Gelfand, B.M. Levitan: Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2 vol 1 (1955) 253.

4) I. Kay, H.E. Moses: Nuovo Cimento 3 (1956) 276, J. Appl. Phys. 27 (1956) 1503.

5) P.D. Lax: Comm. Pure and Appl. Math. 21 (1968) 467

6) V.E. Zakharov, A.B. Shabat: Soviet Phys. JETP 34 (1972) 62

7) L.D. Faddeev: Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2 vol. 65? (1968) 139.

★) Faddeevが示しているように $\psi(x,k)$ は複素 k 平面において，上半面 ($\mathrm{Im}\, k>0$) で解析的である。

ψ, ψ^* の記号は Zakharov–Shabat にならった。これらと Faddeev の $f_1(x,k)$, $f_2(x,k)$ などとの対応は次のようになる。

$$\psi(x,k) \longleftrightarrow f_2(x,k)$$
$$\psi^*(x,k) \longleftrightarrow f_2(x,-k)$$
$$\tilde{\psi}(x,k) \longleftrightarrow f_1(x,k)$$
$$\varphi(x,k) \longleftrightarrow \psi_1(x,k)$$

また，$a(k) \longleftrightarrow s_{11}$，$b(k) \longleftrightarrow s_{12}$.